Modelo Neoclásico con Incertidumbre

Diego Ascarza

RIEF

Introducción

- Hay muchas formas de incorporar incertidumbre al Modelo de Crecimiento Neoclásico:

  1. Choques tecnológicos:
  $$Y_t = \theta_t F(K_t, L_t)$$
  en donde θ_t es una variable aleatoria
  2. Choques de preferencias (β_t factor de descuento aleatorio).
  3. Choques de política (g_t y M_t) aleatorios.

Introducción

- La incertidumbre puede cambiar el comportamiento de los agentes económicos. En particular, vamos a asumir que:
  1. Los agentes conocen las realizaciones pasadas y presentes (la historia) de los choques - pero no las realizaciones futuras.
  2. Sin embargo, conocen el proceso estocástico.
  3. Los agentes eligen planes contingentes para cada variable ¿qué es un plan contingente?
  4. Objetivo: Maximizar utilidad esperada.

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Notación

- z: variable aleatoria (choque).
- Z: conjunto del cual z se extrae cada periodo.
- $z_t \in Z$: realización del choque en el periodo t.
- $z^t = (z_0, z_1, ..., z_t)$: historia de las realizaciones del choque hasta t.
- Z^t: conjunto de todas las posibles historias hasta el periodo t.
- $Z^t \backslash z^{t-s}$: conjunto de todas las posibles historias hasta el periodo t que empiezan con z^{t-s}

Notación

- Si $Z = (Z_1, Z_2, ...Z_n)$ es finito, z es una variable aleatoria discreta. Entonces, dado $z_0 \in Z$, definimos:

  1. $\pi(z^t)$: probabilidad de observar la historia z^t en el periodo t, con:

  $$0 \leq \pi(z^t) \leq 1 \quad \sum_{z^t \in Z^t} \pi(z^t) = 1$$

  2. Esperanza: $E_0 x_t(z^t) = \sum_{z^t \in Z^t} \pi(z^t) x_t(z^t)$
  3. Esperanza condicional: $E_{t-s} x_t(z^t) = \sum_{z^t \in Z^t \setminus z^{t-s}} \frac{\pi(z^t)}{\pi(z^{t-s})} x_t(z^t)$

- Si $Z \subseteq R$ es infinito, z es una variable aleatoria continua. Trabajaremos entonces con una función de densidad $\phi(z^t)$

Modelo con Choques Tecnológicos Discretos

- Función de Producción Estocástica:

$$Y_t = e^{z_t} F(K_t, L_t)$$

en donde F_t satisface los supuestos habituales. Con $L_t = 1$, reescribimos:

$$Y_t = F(K_t, 1) = e^{z_t} f(K_t)$$

- Utilidad Esperada:

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t(z^t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

Equilibrio Competitivo Estocástico

- Un equilibrio competitivo estocástico para esta economía es un conjunto de planes contingentes para las cantidades $c_t(z^t), i_t(z^t), k_{t+1}(z^t), Y_t(z^t), K_t(z^t)$ y los precios $w_t(z^t), r_t(z^t)$ tales que:

- i) Dados $k_0 > 0$, z_0, $w_t(z^t)$, $r_t(z^t)$ y el proceso estocástico para z, los planes $c_t(z^t)$, $i_t(z^t)$, y $k_{t+1}(z^t)$ resuelven el problema del consumidor:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$s.t.$$

$$c_t(z^t) + i_t(z^t) = w_t(z^t) + r_t(z^t) k_t(z^{t-1}) \quad \forall z^t, \forall t$$

$$k_{t+1}(z^t) = (1-\delta) k_t(z^{t-1}) + i_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

Equilibrio General Competitivo

- ii) Para cada historia z^t en cada periodo t, dados $w_t(z^t)$ y $r_t(z^t)$, los valores $Y_t(z^t$ y $K_t(z^t)$ resuelven el problema de la empresa:

$$max \quad Y_t(z^t) - w_t(z^t) - r_t(z^t)K_t(z^t)$$

$$s.t$$

$$Y_t(z^t) = e^{z^t} f[K_t(z^t)]$$

- iii) Para cada historia z^t en cada periodo t, los mercados se vacían:

$$Y_t(z^t) = c_t(z^t) + i_t(z^t)$$

$$K_t(z^t) = k_t(z^{t-1})$$

Problema del Planificador

- Dados $k_0 > 0$, z_0 y el proceso estocástico para z, el planificador social elige planes contingentes para las cantidades $c_t(z^t)$, $i_t(z^t)$ y $k_{t+1}(z^t)$ resolviendo:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$s.t.$$

$$c_t(z^t) = e^{z_t} f[k_t(z^{t-1})] - i_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

$$k_{t+1}(z^t) = (1-\delta)k_t(z^{t-1}) + i_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

Aún con incertidumbre, si no hay distorsiones o externalidades los Teoremas del Bienestar se cumplen.

Problema del Planificador

- Tendremos el siguiente Lagrangeano intertemporal estocástico:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \{\beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$-\lambda_{1,t}(z^t) \left[c_t(z^t) + i_t(z^t) - e^{z_t} f[k_t(z^{t-1})]\right]$$

$$-\lambda_{2,t}(z^t)[k_{t+1}(z^t) - (1-\delta)k_t(z^{t-1}) - i_t(z^t)]$$

Problema del Planificador

- Con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t(z^t)} = \beta^t \pi(z^t) u'[c_t(z^t)] - \lambda_{1,t}(z^t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t(z^t)} = -\lambda_{1,t}(z^t) + \lambda_{2,t}(z^t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}(z^t)} = \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \setminus z^t} \lambda_{1,t+1}(z^{t+1}) e^{z_{t+1}} f'[k_{t+1}(z^t)] - \lambda_{2,t}(z^t)$$

$$+ \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \setminus z^t} \lambda_{2,t+1}(z^{t+1})(1-\delta) = 0$$

Problema del Planificador Social

- De este modo, la solución está caracterizada por:
  1. Ecuación de Euler:

$$u'[c_t(z^t)] = \beta E_t \left\{ u'[c_{t+1}(z^t)](e^{z_{t+1}} f'[k_{t+1}(z^t)] + (1-\delta)) \right\}$$

  con:

$$E_t x(z^{t+1}) = \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \setminus z^t} \frac{\pi(z^{t+1})}{\pi(z^t)} x(z^{t+1})$$

  2. Ecuación de Factibilidad:

$$c_t(z^t) = e^{z_t} f[k_t(z^{t-1})] k_{t+1}(z^t) + (1-\delta) k_t(z^{t-1})$$

  3. Condición de transversalidad:

$$\lim_{t \to \infty} E_0 \beta^t u'[c_t(z^t)] k_{t+1}(z^t) = 0$$

Equilibrio Estacionario

- Resolviendo el equilibrio, obtenemos planes contingentes para todas las variables (cantidades, precios).
- Dado el proceso estocástico para el choque, estos planes definen procesos para las variables - difíciles de caracterizar.
- NO hay un equilibrio estacionario en un sentido estricto, las variables se mueven permanentemente.
- Podemos sin embargo tener un equilibrio en el cual las variables siguen un proceso estacionario estocástico - todos sus momentos (media, varianza, etc) son constantes a lo largo del tiempo.

Mercados Secuenciales y de Arrow - Debreu

- Hasta ahora hemos trabajado con *Mercados Secuenciales*:
    - En cada periodo se abre un mercado nuevo, en el cual se intercambian bienes y factores productivos del periodo corriente.
    - En el mercado determinístico hay tantos mercados como periodos.
    - Con incertidumbre, hay un mercado para cada historia o estado del mundo.
    - Por lo tanto, tenemos una restricción presupuestaria para cada periodo o estado del mundo.

Mercado de Arrow - Debreu

- Una estructura de mercados alternativa es la propuesta por Arrow - Debreu:
  - Solo hay un mercado, que se abre en el periodo inicial (t=0).
  - En ese mercado se intercambian promesas de entregar bienes o factores productivos en cualquier periodo futuro para cada estado del mundo.
  - Existe una única restricción presupuestaria.
  - Interpretamos los planes contingentes como mercancías de Arrow - Debreu.

Mercado de Arrow - Debreu

- Definimos $p_t(z^t)$ como el precio en el periodo 0 de una unidad del único bien entregada en el periodo t si la historia de los choques es z^t.
- Normalizamos $p_0(z_0) = 1$.
- Un equilibrio de Arrow-Debreu es un conjunto de canastas $c_t(z^t), i_t(z^t), k_{t+1}(z^t), Y_t(z^t), K_t(z^t)$ y precios $p_t(z^t), w_t(z^t), r_t(z^t)$ tales que:

Mercado de Arrow - Debreu

- i) Dados $k_0 > 0$, $z_0, p_t(z^t), w_t(z^t), r_t(z^t)$ y el proceso estocástico para z, las canasstas $c_t(z^t), i_t(z^t)$ y $k_{t+1}(z^t)$ resuelven:

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$s.t$$

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} p_t(z^t)[c_t(z^t) + i_t(z^t)]$$

$$= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} p_t(z^t)[w_t(z^t) + r_t(z^t) k_t(z^{t-1})]$$

$$k_{t+1}(z^t) = (1-\delta) k_t(z^{t-1}) + i_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

Mercado de Arrow - Debreu

- ii) Dados $w_t(z^t)$ y $r_t(z^t)$, las canastas $Y_t(z^t)$ y $K_t(z^t)$ resuelven:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} p_t(z^t)[Y_t(z^t) - w_t(z^t) - r_t(z^t)K_t(z^t)]$$

$$s.t.$$

$$Y_t(z^t) = e^{z_t} f[K_t(z^t)] \quad \forall z^t, \forall t$$

- iii) Para cada historia z^t en cada periodo t, los mercados se vacían:

$$Y_t(z^t) = c_t(z^t) + i_t(z^t)$$
$$K_t(z^t) = k_t(z^{t-1})$$

- Resolviendo el problema del consumidor:

$$L = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \{\beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$-\lambda_1 p_t(z^t)[c_t(z^t) + i_t(z^t) - w_t(z^t) - r_t(z^t)k_t(z^{t-1})]$$

$$-\lambda_{2t}(z^t)[k_{t+1}(z^t) - (1-\delta)k_t(z^{t-1}) - i_t(z^t)]$$

- Con condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial L}{\partial c_t(z^t)} = \beta^t \pi(z^t) u'[c_t(z^t)] - \lambda_1 p_t(z^t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial i_t(z^t)} = -\lambda_1 p_t(z^t) + \lambda_{2,t}(z^t) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_{t+1}(z^t)} = \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \setminus z^t} \lambda_1 p_{t+1}(z^{t+1}) r_{t+1}(z^{t+1})$$

$$-\lambda_{2t}(z^t) + \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \setminus z^t} \lambda_{2t+1}(z^{t+1})(1-\delta) = 0$$

Mercado de Arrow - Debreu

- El equilibrio A-D está caracterizado por:

  1. Ecuación de Euler Estocástica:

  $$u'[c_t(z^t)] = \beta E_t \left\{ u'[c_{t+1}(z^{t+1})](r_{t+1}(z^{t+1}) + (1-\delta)) \right\}$$

  2. Condición de Factibilidad:

  $$c_t(z^t) = e^{z_t} f[k_t(z^{t-1})] - k_{t+1}(z^t) + (1-\delta)k_t(z^{t-1})$$

  3. Precios de Arrow-Debreu:

  $$\frac{p_t(z^t)}{p_{t+1}(z^{t+1})} = \frac{\pi(z^t)u'[c_t(z^t)]}{\beta\pi(z^{t+1})u'[c_{t+1}(z^{t+1})]}$$

Mercado de Arrow - Debreu

- Usando la normalización $p_0(z_0) = 1$:

$$p_t(z^t) = \beta^t \frac{u'[c_t(z^t)]}{u'[c_0(z_0)]}\pi(z^t)$$

- Precios de Factores:

$$w_t(z^t) = e^{z_t} f[K_t(z^t)] - e^{z_t} f'[K_t(z^t]K_t(z^t)$$

$$r_t(z^t) = e^{z_t} f'[K_t(z^t)]$$

- Condición de transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{z^t \in Z^t} p_t(z^t) k_{t+1}(z^t) = 0$$

Mercados Completos

- Una estructura de mercados secuenciales y completos requiere que existan activos para cada estado posible del mundo:
  - $b_{t+1}(z^{t+1})$: bono contingente comprado en el periodo t, con retorno 1, si z^{t+1} ocurre y 0 en caso contrario.
  - $q_t(z^{t+1})$: precio de dicho bono en el periodo t.
- Dado que estos bonos se intercambian entre los consumidores, la oferta neta de estos es cero.

Mercados Completos - EGC

- Un equilibrio competitivo con mercados completos es un conjunto de planes contingentes $c_t(z^t), i_t(z^t), b_{t+1}(z^{t+1}), k_{t+1}(z^t), Y_t(z^t), K_t(z^t)$ y precios $q_t(z^{t+1})$, $w_t(z^t), r_t(z^t)$ tales que:
- i) Dados $k_0 > 0$, $z_0, b_0 = 0$, $q_t(z^{t+1})$, $w_t(z^t)$, $r_t(z^t)$ y el proceso estocástico para z, los planes $c_t(z^t), i_t(z^t), b_{t+1}(z^{t+1})$ y $k_{t+1}(z^t)$ resuelven:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

- i) Dados $k_0 > 0$, $z_0, b_0 = 0$, $q_t(z^{t+1})$, $w_t(z^t)$, $r_t(z^t)$ y el proceso estocástico para z, los planes $c_t(z^t), i_t(z^t), b_{t+1}(z^{t+1})$ y $k_{t+1}(z^t)$ resuelven:

$$max \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \beta^t \pi(z^t) u[c_t(z^t)]$$

$$s.t.$$

$$c_t(z^t) + i_t(z^t) + \sum_{z^{t+1} \in Z^{t+1} \backslash z^t} q_t(z^{t+1}) b_{t+1}(z^{t+1})$$

$$= w_t(z^t) + r_t(z^t) k_t(z^{t-1}) + b_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

$$k_{t+1}(z^t) = (1 - \delta) k_t(z^{t-1}) + i_t(z^t) \quad \forall z^t, \forall t$$

$$b_{t+1}(z^{t+1}) > -B \quad \forall z^{t+1} \in Z^{t+1}, \forall z^t \forall t$$

Mercados Completos - EGC

- ii) Para cada historia z^t en cada periodo t, dados $w_t(z^t)$ y $r_t(z^t)$, los valores $Y_t(z^t)$ y $K_t(z^t)$ resuelven:

$$max \quad Y_t(z^t) - w_t(z^t) - r_t(z^t)K_t(z^t)$$

$$s.t.$$

$$Y_t(z^t) = e^{z_t} f[K_t(z^t)]$$

- iii) Para cada historia z^t en cada periodo t, los mercados se vacían:

$$Y_t(z^t) = c_t(z^t) + i_t(z^t)$$

$$K_t(z^t) = k_t(z^{t-1})$$

$$b_{t+1}(z^{t+1}) = 0 \quad \forall z^{t+1} \in Z^{t+1} \backslash z^t$$

Mercados Completos - EGC

- El equilibrio está caracterizado por:
  1. Ecuación de Euler estocástica:

$$u'[c_t(z^t)] = \beta E_t \left\{ u'[c_{t+1}(z^{t+1})](r_{t+1}(z^{t+1}) + (1-\delta)) \right\}$$

  2. Condición de factibilidad:

$$c_t(z^t) = e^{z_t} f[k_t(z^{t-1})] - k_{t+1}(z^t) + (1-\delta)k_t(z^{t-1})$$

  3. Precio de bonos:

$$q_t(z^{t+1}) = \frac{\beta\pi(z^{t+1})u'[c_{t+1}(z^{t+1})]}{\pi(z^t)u'[c_t(z^t)]} \quad \forall z^{t+1} \in Z^{t+1} \backslash z^t$$

Mercados Completos - EGC

- Precios de Factores:

$$w_t(z^t) = e^{z_t} f[K_t(z^t)] - e^{z_t} f'[K_t(z^t]K_t(z^t)$$

$$r_t(z^t) = e^{z_t} f'[K_t(z^t)]$$

- Condiciones de Transversalidad:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \left(\prod_{j=1}^{t} q_{j-1}(z^j) \right) k_{t+1}(z^t) = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{z^t \in Z^t} \left(\prod_{j=1}^{t} q_{j-1}(z^j) \right) b_t(z^t) = 0$$

Análisis

- Con mercados completos, los equilibrios de Arrow-Debreu y de mercados secuenciales son equivalentes:
  - Los planes contingentes $c_t(z^t), i_t(z^t), k_{t+1}(z^t), Y_t(z^t), K_t(z^t)$ son los mismos.
  - Los precios de los factores $w_t(z^t), r_t(z^t)$ son iguales.
  - Los precios de los bonos satisfacen:

$$q_t(z^{t+1}) = \frac{p_{t+1}(z^{t+1})}{p_t(z^t)} \quad \forall z^{t+1} \in Z^{t+1} \backslash z^t$$

Análisis

- Como tenemos un único agente (representativo), la oferta neta de cada activo financiero es cero. En equilibrio, el consumidor representativo está restringido por las condiciones de vaciado de mercado. Por lo tanto, podemos implementar el equilibrio de Arrow-Debreu solo con un activo (capital).